

Orientações curriculares para o ensino da Estatística

Análise comparativa de três países¹

João Pedro da Ponte

*Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da
Universidade de Lisboa*

jponte@fc.ul.pt

Helena Fonseca

*Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da
Universidade de Lisboa*

hfonseca@netcabo.pt

Resumo

Em Portugal, a estatística é um tema recente do currículo, havendo diversas perspectivas para o seu ensino. Uns, valorizam, sobretudo, os aspectos matemáticos da estatística, outros, dão especial importância ao seu uso na análise e interpretação de dados, e outros, ainda, realçam o seu papel como linguagem de descrição da realidade. O presente artigo analisa os objectivos, conteúdos e orientações metodológicas relativamente a este tema e discute a sua importância curricular. Recorre a uma metodologia de análise documental, estudando as tendências internacionais e comparando o currículo português com o da Inglaterra e dos Estados Unidos da América. Esta comparação mostra que o currículo português confere proeminência aos aspectos matemáticos, nomeadamente os conceitos, cálculos e outros procedimentos e que o currículo inglês oficial e a organização americana do NCTM colocam em primeiro plano a análise de dados. Enquanto que, em Portugal, a estatística é vista como um capítulo da matemática, de importância menor, na Inglaterra e nos Estados Unidos ela é encarada como um tema autónomo que suporta a realização de investigações sobre problemas actuais. O artigo conclui que currículo português deveria assumir que a estatística é um elemento fundamental da formação para a cidadania, evitando centrar-se, sobretudo, nos aspectos representacionais e computacionais.

Palavras-chave

Estatística, Currículo, Comparações internacionais

¹ Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da estatística: Análise comparativa de três países. *Quadrante*, 10(1), 93-115. Este artigo é uma versão mais elaborada e actualizada na sua base documental de uma comunicação apresentada pelos autores no Encontro sobre o Ensino e Aprendizagem da Estatística, realizado na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em Fevereiro de 2000.

Introdução

Em todos os países, a Estatística constitui uma área relativamente recente no currículo de Matemática. Em Portugal, o seu surgimento como tema curricular remonta ao período da Matemática moderna, na década de 60 (Silva, 1964). Mais tarde, nos anos 70, foi introduzida no currículo do ensino secundário e, posteriormente, do ensino básico, mas sempre num lugar relativamente marginal. Ainda hoje, os próprios professores não lhe parecem dar muita importância. Na verdade, um estudo realizado pela APM (1998) mostra que um número significativo de professores considera que este tema poderia ser reduzido na sua importância curricular no ensino secundário e também no ensino básico.

Num encontro recente dedicado ao ensino da Estatística, tornou-se evidente a existência de uma grande variedade de perspectivas. Enquanto que uns valorizam, sobretudo, os aspectos matemáticos da Estatística, outros dão especial importância ao seu uso na análise e interpretação de dados e outros, ainda, realçam o seu papel como linguagem de descrição e argumentação sobre a realidade. Além disso, enquanto que uns parecem apoiar o tratamento que o tema encontra nos actuais currículos portugueses, outros consideram ser necessário trabalhá-lo de modo mais aprofundado. Neste encontro, o modo como os professores encaram o ensino deste tema foi largamente discutido, tendo sido consensual a necessidade de promover junto deles uma melhor imagem da respectiva importância no mundo actual (ver em Loureiro, Oliveira e Brunheira, 2000).

Nesta situação afigura-se pertinente realizar uma análise aprofundada dos objectivos, conteúdos e orientações metodológicas relativamente a este assunto, bem como uma discussão sobre o seu papel e importância curricular. É o que se pretende com este trabalho. O seu principal propósito é analisar os objectivos do ensino da Estatística, tanto ao nível do ensino básico como do secundário, e discutir a adequação dos currículos portugueses em vigor. Para isso, fazemos uma análise das tendências no ensino desta área, a nível internacional, e comparamos de modo detalhado o currículo português com o de dois outros países onde muito recentemente foram publicados novos documentos curriculares: a Inglaterra e os Estados Unidos da América.

Este trabalho usa uma metodologia de análise documental. Na sua parte comparativa, considera os documentos de natureza curricular de Portugal e de Inglaterra, onde existem currículos nacionais e no caso dos Estados Unidos da América,

onde esse currículo não existe, recorreu-se aos *Principles and standards for school mathematics*, do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000). A análise é realizada com base num sistema de categorias que resultam da consideração dos objectivos curriculares e metodologias para o ensino da Estatística.

O lugar da Estatística no currículo

A Estatística tem sido encarada no ensino numa variedade de perspectivas. Como refere Peter Holmes (2000), em Inglaterra, um dos países pioneiros neste campo, esta começou a ser incluída nos currículos de Matemática do ensino secundário no final dos anos 50, estreitamente ligada ao estudo das Probabilidades e com uma orientação marcadamente teórica (com especial relevo para o estudo de testes de hipóteses). Um pouco mais tarde começou a ser igualmente introduzida nos currículos do ensino primário (nomeadamente, formas de representação de dados e medidas simples de tendência central). No final dos anos 70, surgiu neste país um importante projecto de desenvolvimento curricular, promovido pelo Schools Council, em que a Estatística era essencialmente encarada como “trabalho com dados”. As orientações deste projecto viriam a ser plenamente consagradas no chamado relatório Cockcroft (1982) que, por sua vez, veio a constituir uma influência determinante no *National Curriculum* inglês. Esta abordagem, posteriormente, tornou-se também marcante nos currículos de muitos outros países. Assim, aquele autor indica que hoje em dia coexistem na Europa três grandes tendências relativas ao ensino da Estatística: (i) ênfase no processo de Análise de Dados, na perspectiva em que esta ciência é utilizada na sociedade, tendo em conta que o uso de dados faz parte da vida de todos os dias (tendência predominante em países como a Inglaterra); (ii) como capítulo da Matemática, por vezes designada por Estocástica, enfatizando aspectos conceptuais e/ou computacionais (abordagem seguida, por exemplo, na França); e (iii) como *'state' istics*, ou seja, como uma ferramenta auxiliar para o estudo de diversos assuntos e disciplinas escolares (tendência visível, por exemplo, na Suécia).

A terceira tendência diz sobretudo respeito ao modo como a Estatística é usada em diversas disciplinas escolares – aspecto que assume particular importância quando na disciplina de Matemática ela merece reduzida atenção. Em contraponto, as duas primeiras tendências dizem respeito ao modo como este tema é abordado na disciplina

de Matemática – com ênfase nos aspectos matemáticos ou com ênfase no processo de utilização nos mais diversos campos.

São numerosos os autores, alguns dos quais reputados estatísticos, que sublinham a importância da Análise de Dados. Assim, por exemplo, Robert Hogg (1991) considera que o ensino da Estatística deve começar por dar atenção à aprendizagem da formulação de questões apropriadas, ao modo de recolher dados de forma efectiva, à sistematização e interpretação dessa informação e à compreensão das limitações da inferência estatística. Este autor considera que

ao nível da iniciação, a Estatística não deve ser apresentada como um ramo da Matemática. A boa Estatística não deve ser identificada com rigor ou pureza matemáticos mas ser mais estreitamente relacionada com pensamento cuidadoso. Em particular, os alunos devem apreciar como a Estatística é associada com o método científico: observamos a natureza e formulamos questões, coligimos dados que lançam luz sobre essas questões, analisamos os dados e comparamos os resultados com o que tínhamos pensado previamente, levantamos novas questões e assim sucessivamente. (pp. 342-3)

Outro estatístico, Ronald Snee (1993), aponta também que há um consenso crescente que, no que se refere aos conteúdos da educação estatística, esta “se deve afastar da abordagem matemática e probabilística e colocar mais ênfase na recolha de dados, na compreensão e modelação da variação, na apresentação gráfica dos dados e na concepção de experiências, *surveys*, resolução de problemas e melhoria de processos” (p. 151). Esta valorização dos aspectos relacionados com o tratamento de dados tem levado a que, em alguns países, o termo “Análise de Dados”² surja como o grande descritor deste tema em substituição do próprio termo “Estatística”.

Mas as questões que se colocam relativamente ao modo de encarar o ensino da Estatística não se resumem à prioridade a conceder aos aspectos matemáticos ou ao processo de utilização dos respectivos conceitos na Análise de Dados. Na verdade, Rosário Almeida (2000) identificou quatro grandes perspectivas sobre a Estatística, a que correspondem, por sua vez, quatro grandes perspectivas sobre o seu ensino. Na primeira perspectiva a Estatística é encarada essencialmente como um fim em si mesmo. A ênfase está nos seus conceitos e métodos próprios, bem como nas suas ligações aos outros campos da Matemática, com especial destaque para a Teoria das Probabilidades. É uma perspectiva que informa fortemente o ensino avançado nas universidades, muito em especial para os alunos de Matemática. Numa segunda

² Em inglês, *data handling*.

perspectiva, a Estatística surge como um instrumento ou uma ferramenta que permite representar e descrever aspectos específicos da realidade, sobretudo os que se prestam a um tratamento quantitativo. Aparece aqui com toda a força a ideia de Análise de Dados. Para uma terceira perspectiva, a Estatística envolve a produção de novo conhecimento. Sublinha-se aqui “a permanente interdependência entre as situações da vida real, os conceitos formais necessários ao seu estudo, as descrições numéricas a que estes conduzem e as interpretações que as mesmas sugerem” (p. 39). A Estatística não se basta a si própria e é preciso dar também atenção à realidade que supostamente irá descrever. Finalmente, para uma quarta perspectiva, a Estatística constitui sobretudo uma actividade social, sendo dada especial atenção à interacção entre os diversos intervenientes que conduz ao produto final. Não se exclui, naturalmente, o uso dos conceitos e a produção de conhecimentos, mas “valoriza-se , sobretudo, a experiência que a eles conduz e a interacção social que lhes está subjacente” (p. 40). Assim, a Estatística pode ser encarada (i) como um *assunto que se basta a si mesmo*, ou seja, “como uma 'ciência exacta' objectiva, coerente e universal, à imagem e semelhança dos outros ramos da Matemática”, (ii) como um *'instrumento' matemático* relevante sobretudo pelo papel que desempenha na resolução de problemas práticos e no desenvolvimento de outras áreas do saber, (iii) “como um *'produto social' situado e contingente*, dependente de quem o elabora, de quem o utiliza” e do respectivo contexto, ou ainda (iv) como uma *actividade social* a valorizar não tanto “pelo produto que dela resulta mas sobretudo pelos processos que lhe estão associados” (p. 41).

Nos últimos anos, as novas tecnologias de informação e comunicação (TIC) têm exercido uma influência importante no ensino da Estatística, possibilitando a realização de todo o tipo de cálculos e facilitando o uso de uma grande variedade de formas de representação. Deste modo, as TIC possibilitam o tratamento de dados reais, em vez do tradicional trabalho com amostras de pequena dimensão onde os valores são escolhidos de modo artificial para proporcionarem cálculos simples. Mais recentemente, a Internet, onde é possível obter uma imensa variedade de dados estatísticos, surgiu como um recurso de grande alcance para o ensino-aprendizagem deste tema³.

As novas tecnologias não são apenas um meio auxiliar útil para o trabalho em Estatística. Como indica Branco (2000), hoje em dia, elas constituem um elemento indispensável na prática neste campo:

Que a Matemática é essencial ao desenvolvimento da Estatística, parece não levantar dúvidas a ninguém, mas esquecer ou ignorar os outros ingredientes (a indispensável presença dos dados, a essencial intervenção dos computadores e uma certa arte de analisar dados) que fazem parte integrante da ciência Estatística, e que a distinguem claramente da Matemática, levanta grandes preocupações e reacções por parte dos estatísticos. O raciocínio típico da Estatística é diferente do que se usa em Matemática e daí que seja legítimo tentar evitar que o ensino da Estatística se faça adoptando uma orientação semelhante à que é seguida quando se ensina Matemática. (pp. 24-5)

Este autor demarca-se assim do modo dedutivo e estruturado como a Matemática é, ainda hoje, ensinada e defende que no caso da Estatística o ensino deve seguir uma lógica de resolução de problemas ou investigações baseada em situações reais e com recurso a recolha de dados pelos próprios alunos. Para diversos autores, que assumem uma perspectiva semelhante, o desenvolvimento da capacidade de formular e conduzir investigações recorrendo a dados de cunho quantitativo é o objectivo fundamental da educação estatística. É o caso de Bright e Hoeffner (1993, referidos em Almeida, 2000) que criticam a ênfase nas técnicas de cálculo e no formalismo e defendem o trabalho dos alunos através de problemas reais, desenvolvido através de um ciclo de investigação. Estes autores recomendam que

o ensino e a aprendizagem desta unidade se processe num contexto 'de resolução de problemas reais' no qual os alunos tenham oportunidade para 'colocar as mãos na experiência', isto é, num contexto lectivo onde os alunos possam (...) participar 'em todo o processo, desde a formulação do problema, à organização, representação, sumarização, e interpretação dos dados (...) [passando pela] tomada de decisões acerca dos métodos a usar na recolha dos dados'. (p. 90)

Para outros autores, a preocupação principal é com a compreensão das condições de uso dos conceitos e representações estatísticos, de modo a perceber quando essa utilização está a ser bem feita ou de forma enganadora. É o caso de Ed Jacobsen (1989), para quem o estudo da Estatística como uma linguagem deveria merecer prioridade ao nível escolar.

No entanto, estas duas vertentes, qualquer uma delas inegavelmente importante, estão longe de ser contraditórias. A reflexão sobre os problemas que surgem no decurso da realização de projectos e investigações estatísticas pode contribuir fortemente para a compreensão das condições de boa utilização dos conceitos e representações estatísticas

³ Um bom exemplo é dado pelo *site* português ALEA – Acção Local de Estatística Aplicada, que pode ser visto no endereço <http://alea-estp.ine.pt>

e, inversamente, a compreensão dos usos adequados e não-adequados destas técnicas por terceiros não deixa de ter efeitos positivos na concepção e realização dos nossos projectos e investigações.

A questão dos grandes objectivos do ensino da Estatística na escola básica e secundária assume uma importância fundamental. Como refere Branco (2000), para os estatísticos que na década de 50 começaram pela primeira vez a considerar a questão, a razão que justificava a necessidade de introduzir este tema nos currículos do ensino não-superior era a sua divulgação de modo a promover o interesse nos alunos pela frequência de estudos especializados neste domínio.

De então para cá muita coisa mudou e hoje são outros os argumentos com que se defende a importância do ensino deste tema. Assim, por exemplo, Holmes (2000) indica que as finalidades globais para o ensino da Estatística são: (i) levar os alunos a tomar consciência e apreciar o papel da Estatística na sociedade, percebendo os muitos e variados campos em que as ideias estatísticas são usadas e (ii) fomentar neles a compreensão da natureza do pensamento estatístico, incluindo o poder e as limitações deste pensamento.

Em síntese, podemos dizer que a grande importância que a Estatística assume hoje em dia na educação matemática resulta em primeiro lugar do facto de se tratar de um campo com uma enorme expressão na actividade social e em muitos domínios do conhecimento, em especial nas ciências sociais e humanas. Hoje em dia, uma plena participação na sociedade – em termos da vida quotidiana e até em termos do exercício da cidadania – requer uma forte literacia estatística. Esta não surge espontaneamente, pela simples participação na actividade social, pelo que a escola é chamada a desempenhar um papel fundamental na educação dos alunos neste campo.

Uma segunda razão da importância deste tema no currículo de Matemática, resulta do facto da Estatística assumir uma forte especificidade face aos outros tópicos do currículo. O seu objecto não são conceitos simples como números ou figuras geométricas mas agregados de objectos – amostras, colecções. Além disso, como vimos, trata-se de um tema que não deve ser visto como autosuficiente, mas que deve ser encarado na óptica da sua utilização em processos de investigação e em contextos de actividade social. Deste modo, os grandes objectivos do ensino da Estatística enquadram-se nos grandes objectivos do ensino da Matemática, mas não deixam de se revestir de uma especificidade muito própria.

Análise

Como já se referiu, os dados foram recolhidos a partir da base documental constituída pelo *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000), o *National curriculum for maths* inglês (DFEE, 1999) e os programas de Matemática portugueses dos diversos níveis de ensino (ME, 1990, 1991a, 1991b, 1991c, 1991d, 1997). Estes dados, sistematizados nos Anexos 1, 2 e 3, foram analisados utilizando o seguinte sistema de categorias:

- (i) colocar questões, recolher, organizar e representar dados;
- (ii) interpretar dados usando métodos e conceitos;
- (iii) desenvolver e avaliar inferências;
- (iv) compreender e aplicar noções básicas de probabilidade e acaso;
- (v) metodologias e materiais.

Estas categorias resultaram da consideração dos objectivos curriculares e metodologias para o ensino da Estatística. As quatro primeiras foram identificadas num estudo piloto anterior (Ponte e Fonseca, 2000) e a quinta teve em vista tornar a análise mais completa. Nas quatro primeiras categorias, os dados correspondentes a cada um dos documentos programáticos analisados apresentam-se enquadrados nos diferentes níveis de escolaridade que percorrem o currículo. A comparação entre os documentos curriculares é feita por categorias, mas dentro de cada uma delas são igualmente tidos em conta os níveis de ensino. Assim, procurou-se encontrar os melhores equivalentes entre ciclos de escolaridade, embora isso não seja fácil nos primeiros anos de escolaridade (Ver o quadro 1).

Assim, os objectivos propostos para o 1º ciclo do ensino básico português comparam-se com os ingleses do *Key stage 1* (KS 1, alunos até 6-7 anos) e com os americanos da primeira fase da *Elementary school* (alunos de 7-8 anos); os objectivos propostos para o 2º ciclo português comparam-se com os ingleses do *Key stage 2* (KS 2) e os americanos da segunda fase da *Elementary school*; os objectivos do 3º ciclo português com os do *Key stage 3* (KS 3) e da *Middle school*; e os objectivos do ensino secundário português com os do *Key stage 4* (KS 4) e os da *High school*. Na Inglaterra, existem dois programas diferentes para o KS 4, um básico e outro avançado (*Mathematics foundation* e *Higher mathematics*), sendo o avançado destinado a alunos que tenham atingido um determinado nível de objectivos no KS 3.

*Quadro 1 — Estruturação dos documentos curriculares,
por anos de escolaridade⁴*

Idades	Portugal	UK	EUA ⁵
5-6	Jardim de infância	Key stage 1	Elementary school
		1	K
6-7	1º ciclo	2	1
7-8	2	Key stage 2	2
8-9	3	3	3
9-10	4	4	4
11-11	2º ciclo	5	5
11-12	5	6	6
12-13	3º ciclo	Key stage 3	Middle school
		7	7
13-14	8	8	8
14-15	9	9	9
15-16	Ensinho secundário	Key stage 4	High school
		10	10
16-17	10	11	11
17-18	11		12
	12		

Colocar questões, recolher, organizar e representar dados

O NCTM (2000) propõe logo desde a primeira fase da *Elementary school* (níveis Pre-K-2) objetivos que remetem para a primeira parte do processo investigativo – a colocação de questões por parte dos alunos sobre si mesmos e sobre o meio envolvente. Nos níveis seguintes, essas questões já deverão ser baseadas em questões correntes e nos interesses dos alunos, de modo a que na *High school* (níveis 9-12) estes

⁴ Note-se que os anos de escolaridade em Inglaterra começam a ser contados “um ano mais cedo” que em Portugal e nos estados Unidos. Nos EUA, no entanto, é obrigatória a frequência do Kindergarden para todas as crianças de 5 anos.

estejam preparados para formular problemas que explorem assuntos complexos (NCTM, 2000, p. 49). A partir da segunda fase da *Elementary school* (níveis 3-5), para além da formulação dessas questões, enfatiza-se a concepção de investigações e estudos que lhes possam dar resposta. Na *High school*, os alunos devem compreender quais as inferências que podem retirar de diferentes tipos de estudos (*surveys*, estudos de observação e experiências) e ainda ter em consideração como é que uma amostra deve ser seleccionada e qual a dimensão que deverá ter.

Relativamente à recolha de dados, nos primeiros anos esta deve ser muito simples. Os alunos dos níveis 3-5 já deverão avaliar como é que os métodos de recolha de dados podem afectar a natureza do conjunto de dados. E os alunos dos níveis 6-8 e 9-12 deverão recolher dados uni e bivariados e também trabalhar com dados recolhidos por outros ou gerados por simulação (NCTM, 2000, p. 49).

Ao nível da organização e representação dos dados, na primeira fase da *Elementary school* propõem-se objectivos relativos à ordenação e classificação e sugere-se a representação dos mesmos usando tabelas, gráficos de barras e de linha e pictogramas. Na segunda fase da *Elementary school* são sugeridas as mesmas formas de representação de dados, na *Middle school* (níveis 6-8) acrescentam-se os histogramas, os gráficos caixa-de-bigodes, as representações de caule e folhas e os diagramas de dispersão e na *High school* os gráficos caixa-de-bigodes paralelos, de pontos e circulares.

O currículo inglês (DFEE, 1999) não apresenta, ao nível do KS 1, um capítulo dedicado à Análise de Dados. No entanto, no bloco temático intitulado “Números”, sugere que os alunos utilizem listas simples, tabelas e gráficos para ordenar, classificar e organizar informações aquando da resolução de um problema. No nível seguinte, KS 2, refere que os alunos devem saber identificar os dados necessários à resolução de problemas. Recomenda que trabalhem com dados discretos, usando tabelas (incluindo dados agrupados), gráficos e diagramas (incluindo pictogramas, gráficos de barras e de linha).

Nos KS 3 e 4, os alunos devem formular questões, decidir quais os dados a recolher (incluindo o tamanho da amostra) e sob que forma (incluindo dados discretos e contínuos agrupados, considerando intervalos de classe com a mesma amplitude) e recolhê-los utilizando vários métodos (incluindo observação, experimentação

⁵ As designações *Elementary*, *Middle* e *High school* não surgem no documento do NCTM (1998), mas são correntemente usadas nos Estados Unidos da América.

controlada, questionários, *surveys*) e, até mesmo, recorrendo a tabelas e listas de várias fontes.

Em relação à representação dos dados, o currículo inglês dos KS 3 e 4 recomenda a construção, usando papel ou tecnologias, de tabelas, gráficos circulares e de linha, representações de caule e folhas e diagramas de dispersão. Para os alunos que se encontrem a frequentar o KS 4 mais avançado, refere-se a selecção e justificação de um plano de amostragem e de um método para investigar uma população, incluindo aleatoriedade e amostra estratificada. Acrescenta-se, ainda, a construção de tabelas e gráficos de frequências acumuladas, gráficos caixa-de-bigodes e histogramas.

O programa português do 1º ciclo do ensino básico (ME, 1990) aponta para a construção e utilização, pelos alunos, de tabelas e gráficos de barras e faz referência à realização de actividades de classificação. No entanto, estes aspectos têm um estatuto algo estranho no programa: os primeiros (gráficos e tabelas) surgem numa secção introdutória denominada “linguagem e representação” e os segundos (classificação) aparecem noutra secção, também introdutória, denominada “actividades recorrentes” – não constituindo portanto um bloco temático, nem estando incluídos em qualquer dos três blocos existentes (Números e operações, Forma e espaço, Grandezas e medidas).

Nos ciclos seguintes, 2º e 3º, os programas (ME, 1991a, 1991b) propõem como objectivo a recolha, organização e representação dos dados, sugerindo que os alunos aprendam os conceitos de frequência absoluta (no 2º ciclo) e construam tabelas e gráficos de barras, acrescentando-se no 3º ciclo, os gráficos circulares, polígonos de frequência e pictogramas.

No ensino secundário, o programa português (ME, 1997) refere que o aluno deve ficar a saber como organizar, representar e tratar dados recolhidos. Sugere o contacto com aspectos da história da Estatística, de recenseamento e de sondagem e com o conceito de amostragem e correspondente influência sobre a população. Salienta que se construam tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas) e a acrescentar às representações gráficas aprendidas no ciclo anterior surge o histograma, o diagrama de extremos e quartis e de dispersão e a representação de caule e folhas.

Assinalamos então as principais semelhanças e diferenças resultantes da comparação entre os três documentos curriculares:

- o documento do NCTM é o único que dedica um capítulo à Análise de Dados e às Probabilidades na primeira fase da *Elementary school*, no entanto, nos currículos português e inglês do 1º ciclo há algumas

referências mais ou menos explícitas a objectivos relativos à classificação e organização de dados;

- o NCTM refere-se à formulação de questões pelos alunos desde a primeira fase da *Elementary school*, o currículo inglês indica este ponto a partir do KS 3 e o português nunca o propõe explicitamente;
- a recolha de dados por parte dos alunos tem início na primeira fase da *Elementary school* nos Estados Unidos, no 2º ciclo em Portugal e no KS 2 em Inglaterra; contudo, nestes dois países só ao nível do ensino secundário se desenvolve o conceito de amostra, enquanto o NCTM o aborda desde a segunda fase da *Elementary school*;
- no final dos níveis de ensino analisados, os alunos utilizaram sensivelmente os mesmos modos de organização e representação de dados nos três países; no entanto, o contacto com uma maior variedade de formas de representação gráfica é proposto pelo NCTM sempre mais cedo que em Portugal e Inglaterra e isso é visível logo desde a fase correspondente ao 1º ciclo.

Interpretar dados usando métodos e conceitos

Nesta categoria de análise, o NCTM (2000) propõe que, ao nível da primeira fase da *Elementary school*, os alunos descrevam partes de dados e o conjunto de dados como um todo e, na fase seguinte, a ênfase muda da descrição e análise de um conjunto de dados para as comparações envolvendo dois ou mais conjuntos de dados (p. 50). A partir destes níveis, 3-5, sugere-se que os alunos desenvolvam uma apreciação das diferentes formas que pode assumir a distribuição dos dados. Para a interpretação dos dados, os alunos dos níveis Pre-K-2 deverão saber identificar a moda e os dos níveis 3-5 deverão desenvolver uma compreensão das noções de amplitude, moda, mediana e média. Considera-se importante saber, na *Middle school*, determinar e interpretar as medidas de tendência central e de dispersão já referidas, incluindo também a amplitude interquartilica, e, na *High school*, ser capaz de explicar as diferenças entre as diferentes medidas, incluindo o desvio-padrão. Os alunos deste último nível devem também determinar, para dados bivariados, equações de rectas de regressão e coeficientes de correlação utilizando calculadoras e computadores e, em conjunto com os resíduos e representações visuais, investigar relações entre esses dados. Devem ainda reconhecer a influência das transformações lineares de dados univariados na forma, centro e dispersão dos mesmos e identificar tendências nos dados bivariados, procurando encontrar funções que os modelem.

O currículo inglês (DFEE, 1999), sugere que, os alunos do KS 2, para além de interpretarem tabelas, gráficos e diagramas, usem a moda e a amplitude (como uma

medida de dispersão) para descrever conjuntos de dados. Nos níveis seguintes, KS 3 e 4, os alunos devem, para os ajudar na interpretação dos dados, utilizar a moda (ou a classe modal, em dados agrupados), a mediana, a média e a amplitude, compreender e utilizar rectas de regressão e, ainda, ter uma compreensão básica de correlação. Sugere ainda que olhem para os dados e tentem descobrir regularidades e excepções. No nível KS 4 avançado, acrescenta-se a determinação dos quartis e da amplitude interquartilica e sugere-se o uso de funções estatísticas relevantes de uma calculadora ou folha de cálculo.

No programa português do 1º ciclo do ensino básico (ME, 1990) é proposto apenas um objectivo (algo vago) relativo à leitura e interpretação de informação. No 2º ciclo, o programa (ME, 1991a) propõe a interpretação dos dados pelos alunos recorrendo à moda e à média. O programa do 3º ciclo (ME, 1991b) salienta que as medidas de tendência central (média, moda e mediana) devem constituir instrumentos para sintetizar e analisar informação e chama a atenção que, sendo fundamental em Estatística a comparação de casos, é importante, perante duas distribuições comparar e discutir as diferentes medidas de tendência central. No ensino secundário é referido pelo programa (ME, 1997) que os alunos devem compreender e interpretar as medidas de tendência central e de dispersão, recomendando o uso das funções estatísticas da calculadora logo que os alunos compreendam os conceitos aí envolvidos, e usá-las conjuntamente para interpretar distribuições. Sugere também uma abordagem gráfica e intuitiva ao estudo de distribuições bidimensionais e a identificação, a partir de exemplos de nuvens de pontos, do tipo de correlação e da recta de regressão.

Assinalemos agora as principais semelhanças e diferenças resultantes da comparação entre os três documentos:

- o americano e o inglês apontam para a importância de compreender as características globais de um conjunto de dados, enquanto que o português se centra muito nas medidas de tendência central, isto até ao final do 3º ciclo;
- o NCTM enfatiza as comparações envolvendo dois ou mais conjuntos de dados a partir da segunda fase da Elementary school e os currículos português e inglês só o fazem no 3º ciclo;
- ao nível do ensino secundário, o NCTM apela a um estudo mais ou menos aprofundado de dados bivariados (inclui a procura de funções – linear, exponencial, quadrática – que melhor se ajustem a um dado conjunto de dados) e em Portugal apenas se sugere uma abordagem gráfica e intuitiva das distribuições bidimensionais.

Desenvolver e avaliar inferências

Segundo o NCTM (2000), o desenvolvimento da inferência estatística requer que se trabalhe utilizando amostras e isso só terá início a partir dos níveis 3-5 (p.114) dado que a noção de amostra não é considerada acessível para alunos muito novos (p. 50). Assim, para estes alunos (Pre-K-2), defende-se que discutam informalmente se os seus colegas de outras turmas chegariam ou não às mesmas conclusões que eles. Depois, na segunda fase da *Elementary school* e na *Middle school*, já se começam a desenvolver algumas noções acerca de inferência estatística. Assim, nestes níveis de ensino, os alunos devem formular conjecturas e tirar conclusões baseadas nos dados e usá-las para colocar novas questões e conceber novos estudos para posteriormente lhes responder. Além disso, nos níveis 3-5, devem começar a compreender que muitos conjuntos de dados são amostras da mesma população e a discutir o conceito de representatividade de uma amostra (NCTM, 2000, p. 180). Nos níveis 6-8, devem também formular conjecturas acerca das populações com base em amostras daí retiradas e acerca da possível relação entre duas características de uma amostra, baseando-se em diagramas de dispersão e rectas de regressão. No final da *Middle school* e na *High school* sugere-se que os alunos desenvolvam ideias acerca dos modos de escolher amostras e de inferência estatística (NCTM, 2000, p. 50). Assim, nos níveis 9-12, devem usar simulações para aprender acerca das distribuições de amostragem e com base nelas fazer inferência informal. Para além disto, devem também avaliar relatórios publicados, examinando a concepção do estudo, a adequabilidade da análise dos dados e a validade das conclusões.

Nesta categoria de análise, o currículo inglês (DFEE, 1999) propõe que os alunos tirem conclusões a partir dos dados desde o KS 2 e, neste nível, os alunos devem saber reconhecer quando é que a informação apresentada induz em erro. A partir do KS 3 destaca-se a comparação de distribuições e a elaboração de inferências utilizando as formas das distribuições e as medidas de tendência central e amplitude, e no KS 4 avançado, também os quartis. Para além disso, os alunos devem avaliar e verificar resultados, responder às questões colocadas e modificar a sua abordagem se necessário. No KS 4 é ainda sugerido que interpretem estatísticas sociais tais como as relacionadas com o crescimento da população e com os Censos Nacionais.

O programa português do 2º ciclo do ensino básico (ME, 1991a) salienta que os alunos devem formular conjecturas a partir da interpretação da informação e o do 3º ciclo (ME, 1991b) acrescenta que tirem também conclusões, que as fundamentem e que critiquem análises estatísticas justificando as suas razões. No ensino secundário, o programa (ME, 1997) apenas refere que se tirem conclusões tendo sempre presente os limites do processo de matematização da situação.

Com base na análise comparativa dos três documentos programáticos, assinalamos as principais semelhanças e diferenças:

- os documentos americano e inglês dão ênfase a que se tirem conclusões a partir da segunda fase da Elementary school e KS 2, enquanto que o português apenas se refere a isso no 3º ciclo;
- no currículo português não há referência ao desenvolvimento de inferências, enquanto que o NCTM defende o desenvolvimento de noções de inferência estatística a partir da segunda fase da Elementary school e o currículo inglês desde o KS 3;
- o documento do NCTM sugere desde a Middle school a compreensão e utilização de amostras de modo a se tirarem conclusões extensíveis a populações;
- o NCTM equaciona a formulação de novas questões baseadas nas conjecturas formuladas e a concepção de novos estudos para lhes responder desde a Middle school e o currículo inglês também propõe desde o KS 3 a modificação de abordagens depois de se dar resposta às questões colocadas.

Compreender e aplicar noções básicas de probabilidade e acaso

O NCTM (2000) refere que, nos níveis Pre-K-2, as experiências ao nível das Probabilidades devem ser informais, traduzindo-se, por exemplo, na descrição de acontecimentos utilizando vocabulário como: mais provável, menos provável, certo ou impossível (p. 114). Nos níveis seguintes, 3-5, os alunos devem aprender a quantificar a probabilidade de resultados de experiências simples e a compreender que a probabilidade de acontecimentos varia numa escala de 0 a 1. Na *Middle school*, sugere-se a compreensão e uso de terminologia adequada para descrever acontecimentos complementares e mutuamente exclusivos e o cálculo de probabilidades de acontecimentos compostos simples usando listas, diagramas em árvore e modelos de área. Além disso, os alunos devem usar a probabilidade para formular e testar conjecturas acerca dos resultados de experiências e simulações. Na *High school*, devem

calcular probabilidades de acontecimentos compostos, incluindo acontecimentos independentes e probabilidades condicionadas e utilizar simulações para construir distribuições de probabilidade para espaços amostrais simples.

Relativamente às Probabilidades, o currículo inglês (DFEE, 1999), indica como objectivo para o KS 2 desenvolver a compreensão deste conceito e discutir acontecimentos, usando vocabulário como ‘igualmente provável’, ‘justo’, ‘injusto’, ‘certo’. Nos níveis KS 3 e 4, os alunos devem situar a probabilidade de um acontecimento na escala entre 0 e 1, compreender a frequência relativa como uma estimativa para a probabilidade, identificar todos os resultados provenientes de acontecimentos simples ou de dois acontecimentos sucessivos, identificar acontecimentos mutuamente exclusivos e saber que a soma das probabilidades de todos eles é 1 e compreender que aumentando o tamanho da amostra se obtém uma melhor estimativa da probabilidade e das características da população. No KS 4 avançado acrescenta-se a compreensão e cálculo de probabilidades de acontecimentos independentes.

Nesta categoria de análise, o programa português do 2º ciclo do ensino básico (ME, 1991a) indica, sem especificar muito, que os alunos devem tirar conclusões de experiências simples relacionadas com o conceito de probabilidade. O documento programático de apoio ao programa (ME, 1991c), sobre este ponto indica apenas que os alunos devem realizar actividades com dados, moedas, piões e roletas de modo a familiarizarem-se com os termos “certo, possível, impossível, provável...” (p. 39). No 3º ciclo, o programa (ME, 1991b) procura que os alunos se familiarizem com alguns aspectos específicos de linguagem, que utilizem o conceito de probabilidade para resolver problemas simples relacionados com jogos ou outras disciplinas, que organizem processos de contagem e que compreendam e usem a frequência relativa como aproximação da probabilidade. O programa do ensino secundário (ME, 1997) refere que o trabalho se deve iniciar pela realização de experiências aleatórias e, a partir daí, compreender o que são acontecimentos contrários, incompatíveis e independentes. Os alunos devem conhecer a lei dos grandes números e o conceito frequencista de probabilidade e calcular a probabilidade pela Lei de Laplace. Deve ainda considerar-se a distribuição de probabilidades, fazendo referência à curva de Gauss e à distribuição normal, e a definição de probabilidade condicionada. Indica, também, que se deve introduzir a axiomática das Probabilidades. As técnicas de contagem são igualmente

contempladas no programa e, além de constituírem um auxiliar de cálculo, destinam-se a desenvolver as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas.

Assinalemos agora as principais semelhanças e diferenças resultantes da comparação entre os três documentos:

- apenas o NCTM pretende iniciar os alunos nas ideias das Probabilidades a partir da primeira fase da Elementary school;
- o NCTM defende que os alunos aprendam a quantificar a probabilidade de resultados de experiências simples a partir da segunda fase da Elementary school, mas os currículos português e inglês só o propõem desde o 3º ciclo;
- apenas os documentos português e americano fazem referência à definição de probabilidade condicionada e ao uso de distribuições de probabilidades, ao nível do ensino secundário;
- no ensino secundário, o currículo português apresenta-se mais pormenorizado e desenvolvido, sendo o único que procura introduzir os alunos na axiomática das Probabilidades;
- em Portugal e nos Estados Unidos é defendida a utilização da Análise Combinatória (combinações, permutações e arranjos) para o cálculo de probabilidades, no ensino secundário.

Metodologias e materiais

O NCTM (2000), a par da apresentação dos objectivos a atingir na temática da Análise de Dados e Probabilidades, desenvolve uma especificação desses objectivos onde se podem destacar algumas indicações metodológicas a seguir. Essas indicações sugerem, por exemplo, que:

- (i) os alunos dos níveis Pre-K-2, para a organização dos dados em categorias, utilizem experiências informais tais como separar artigos de mercearia ou para aprender a recolher e organizar dados, desenvolvam experiências na turma tais como recolher votos sobre a preferência dos alunos – ir ao jardim zoológico ou ao museu;
- (ii) os alunos dos níveis 3-5 coloquem questões acerca de si próprios, do seu ambiente ou de conteúdos estudados noutras áreas;
- (iii) nos níveis 6-8 seja realizado trabalho interdisciplinar, elaborando experiências de laboratório que envolvam recolha de dados, em conjunto com os professores de ciências;
- (iv) nos níveis 9-12 sejam estabelecidas conexões entre a Estatística e a Álgebra e que se realizem actividades experimentais tais como o lançamento de dados ou piões ou que se discuta se um jogo será ou

não justo, para o desenvolvimento de vários aspectos do estudo das Probabilidades.

É ainda de referir que, todo o desenvolvimento que é feito dos objectivos é acompanhado de um vasto conjunto de exemplos de episódios e experiências que ajudam a ilustrar determinados conceitos e procedimentos que podem servir de inspiração aos professores que vão leccionar a temática da Análise de Dados e Probabilidades aos alunos.

No que respeita ao uso das TIC, o NCTM (2000) enfatiza, a partir dos níveis 3-5, a sua utilização para a organização, ordenação e representação gráfica de conjuntos de dados (p. 49, 178 e 253), facilitando assim o trabalho com conjuntos de dados mais numerosos e mais complexos e permitindo que os alunos se centrem na sua análise e na compreensão do seu significado (p. 49). As novas tecnologias também poderão ajudar, por exemplo, a compreender mais facilmente como é que mudanças nos valores dos dados afectam a média e a mediana de um conjunto de dados (nos níveis 6-8), a estudar alterações provocadas pela modificação da posição de rectas candidatas a rectas de regressão (nos níveis 9-12) e, até, a determinar a equação dessas mesmas rectas e o coeficiente de correlação. Os alunos devem também aprender a descobrir dados relevantes para as suas investigações em fontes como a Internet. Em relação às Probabilidades, as simulações em computador poderão facilitar a sua aprendizagem, permitindo aceder a amostras relativamente grandes que podem ser geradas rapidamente e modificadas facilmente. De entre as TIC, é sugerido o uso de *software* computacional, incluindo *software* gráfico e folha de cálculo, e também calculadoras gráficas.

O currículo inglês (DFEE, 1999) não apresenta explicitamente sugestões metodológicas que orientem a leccionação do tema da Análise de Dados. No entanto, na apresentação dos objectivos que devem ser atingidos pelos alunos dá, pontualmente, algumas orientações, tais como: utilizar situações da sala de aula para desenvolver a compreensão de Probabilidade; resolver problemas em outras áreas do currículo (em particular nas ciências) usando as técnicas de Análise de Dados; interpretar tabelas, listas e gráficos usados no dia-a-dia. Além disso, faz algumas referências à utilização das TIC, sublinhando que ao longo da escolaridade devem ser dadas oportunidades aos alunos para aplicar e desenvolver a sua capacidade de lidar com estas tecnologias para apoiar a sua aprendizagem em todas as matérias (p. 84). Mais concretamente ao nível da Análise de Dados, e nos níveis KS 3 e KS 4, refere que os alunos devem utilizar as TIC (bases de dados, folhas de cálculo, calculadoras) para comunicar as suas descobertas e

representar os dados (construir gráficos), e ainda utilizar funções estatísticas relevantes nelas presentes.

Os programas portugueses dos 2º e 3º ciclos (ME, 1991c, 1991d) e do ensino secundário (ME, 1997) dedicam alguma atenção às metodologias a adoptar aquando da leccionação dos capítulos referentes ao estudo da Estatística e das Probabilidades. Assim, no 2º e 3º ciclos, é sugerido por exemplo, que os alunos:

- (i) realizem estudos estatísticos recorrendo a dados sobre si próprios, os seus interesses e o seu meio, ou ainda dados de revistas, jornais, empresas, etc.;
- (iii) estabeleçam ligações com outras disciplinas e dentro da própria Matemática;
- (iii) realizem experiências práticas (lançar um dado ou moeda) para se familiarizarem com o papel da matemática no estudo da previsão de alguns acontecimentos e com a linguagem das Probabilidades;
- (iv) comuniquem sob diversas formas – exposição oral, trabalho escrito, placard expositivo – as conclusões do seu trabalho (no 3º ciclo).

E no ensino secundário, sugere-se, por exemplo, que:

- (i) o tema da Estatística seja tratado “de forma descontínua ao longo do ano, nomeadamente sob a forma de trabalho de projecto” (ME, 1997, p. 22);
- (ii) os alunos esboquem planos de trabalho interdisciplinares (individuais ou em grupo) e que interpretem e comuniquem, no final, os resultados à turma analisando-os criticamente;
- (iii) recolham dados na turma, de livros e revistas e do INE, tendo em conta a maturidade e sensibilidade dos alunos para os problemas;
- (iv) sejam utilizados exemplos para explorar certas noções e propriedades;
- (v) se façam incursões pela história da Matemática a partir de nomes como Pascal, Tartaglia e Laplace.

Relativamente à utilização das TIC, o programa português do 2º ciclo (ME, 1991c) sugere que o computador pode ser um bom auxiliar no estudo do tema da Estatística. O programa do 3º ciclo (ME, 1991d) refere que a calculadora e computador constituem uma boa ajuda na representação da informação (traçados de gráficos, construção de tabelas, etc.) e no cálculo. O programa do ensino secundário (ME, 1997) recomenda o uso das funções estatísticas da calculadora assim que os alunos compreendam os conceitos aí envolvidos. Além disso, no ensino secundário, o professor

deve incentivar os alunos a recorrer ao computador quando realizarem actividades interdisciplinares no âmbito da Estatística (ME, 1997).

Assinalemos agora as principais semelhanças e diferenças resultantes da comparação entre os três documentos curriculares:

- o português e o americano apresentam-se mais completos e pormenorizados ao nível das metodologias a utilizar, enquanto que o inglês é muitíssimo vago;
- todos eles sugerem a realização de experiências na turma para o desenvolvimento da compreensão de certas noções e o estabelecimento de ligações com outras áreas do currículo;
- o português e o americano apontam para que os estudos realizados sejam sobre os próprios os alunos, os seus interesses, o seu ambiente... e para que se estabeleçam conexões dentro da própria Matemática e, além disso, apresentam alguns exemplos de experiências que podem ser utilizadas na exploração e compreensão de determinados fenómenos;
- o português sugere, embora de uma forma um tanto vaga, a realização de trabalhos de projecto e de incursões pela história da Matemática, ao nível do secundário;
- relativamente às TIC, o português e o inglês recomendam a sua utilização, essencialmente, para a representação dos dados e, também, a utilização das funções estatísticas nelas presentes;
- o americano, para além de usar as TIC na representação, ordenação e representação gráfica de conjuntos de dados, enfatiza a sua utilidade na compreensão de alterações provocadas pela mudança de valores dos dados e nas simulações que ajudam à aprendizagem das Probabilidades e, ainda, a recolha de dados relevantes na Internet.

Conclusão

Os documentos analisados neste artigo têm estatutos e características diversas. O *National Curriculum* inglês é um documento oficial bastante sintético, que se destina a ser complementado por outros materiais de apoio aos professores. Os programas portugueses são documentos também oficiais, que integram numerosas indicações de natureza metodológica. Os *Principles and standards* do NCTM são um documento não oficial, no sentido de que não tem força de lei nos EUA, sendo extremamente desenvolvido em exemplos e justificações. O currículo português cobre a faixa dos alunos dos 6 aos 18 anos, o documento americano dos 5 aos 18 e o currículo inglês apenas dos 5 aos 16. Apesar destas diferenças, a comparação do conteúdo destes documentos permite a realização de um importante conjunto de constatações.

Vimos na primeira parte deste artigo que, a nível internacional, os currículos actuais da disciplina de Matemática encaram a Estatística segundo duas perspectivas: (i) ou dando proeminência aos aspectos matemáticos da Estatística, nomeadamente os conceitos, cálculos e outros procedimentos ou (ii) colocando em primeiro plano a Análise de Dados. A comparação realizada mostra claramente que o currículo português se situa na primeira perspectiva e que o currículo inglês oficial e o currículo americano proposto pelo NCTM se situam ambos na segunda. A Análise de Dados aparece no currículo português, mas num lugar extremamente secundário, como mera aplicação dos conceitos estatísticos, assumindo, em contrapartida, um lugar de relevo nos documentos curriculares dos outros dois países considerados. Assim, enquanto que, em Portugal, a Estatística é vista como um capítulo da Matemática e, muitas vezes, como um capítulo de importância menor, na Inglaterra e nos Estados Unidos assume-se que ela é parte integrante de um processo mais geral que envolve a realização de investigações, formulando questões, recolhendo, representando, organizando e interpretando dados, fazendo inferências e, a partir daí, colocando novas questões e reiniciando o ciclo investigativo.

Deste modo, nos Estados Unidos e na Inglaterra, o processo investigativo como um todo — nas suas diversas fases, do planeamento à realização e daí à conclusão — recebe atenção explícita. Em Portugal, pelo contrário, dá-se apenas atenção a um dos aspectos desse processo — a representação dos dados — deixando por tratar ou referindo apenas muito superficialmente os aspectos relativos ao planeamento das investigações e à realização de inferências. Na própria representação dos dados, o currículo português do ensino básico deixa bastante a desejar, pois tanto no que se refere à diversidade das formas de representação recomendadas como no que respeita ao momento da sua introdução, fica muito aquém do que é proposto no documento americano.

No modo como são tratados os conceitos de Estatística notam-se também algumas diferenças significativas entre os diversos documentos. O currículo português, até ao final do 3º ciclo do ensino básico, dá sobretudo atenção às medidas de tendência central, enquanto que os documentos americano e inglês valorizam, também, desde relativamente cedo, as medidas de dispersão. O conceito de amostra desempenha um papel importante nas propostas curriculares do NCTM desde a parte final da *Elementary school* americana, enquanto que no nosso país, os alunos terminam a escolaridade básica — para muitos, a última etapa da vida escolar — sem nunca terem ouvido falar

em tal conceito na disciplina de Matemática! No ensino secundário, o estudo de dados bivariados, numa abordagem intuitiva, faz parte do currículo português, enquanto que no documento americano se propõe o estudo de dados bivariados de modo igualmente intuitivo mas mais aprofundado (ajustamento de dados através de funções lineares, quadráticas e exponenciais). Neste aspecto, faltou ousadia ao currículo português para tirar um partido mais efectivo das possibilidades das novas tecnologias.

Relativamente ao modo como são usados os conceitos de Estatística, salienta-se uma perspectiva mais ampla por parte do documento americano, que propõe, desde o equivalente ao 2º ciclo do ensino básico, a realização de comparações envolvendo dois ou mais conjuntos de dados. Esse tipo de comparações só surge, timidamente, em Portugal, no 3º ciclo.

A abordagem ao conceito de probabilidade também é proposta bastante mais cedo nos EUA do que em Portugal. No entanto, no ensino secundário os currículos americano e português são semelhantes, com alguma vantagem até para este último, o único que propõe o estudo da axiomática da Teoria das Probabilidades. De notar que o menor tratamento que estas questões encontram no currículo inglês é compreensível, dado o facto de este se reportar apenas a alunos até aos 16 anos.

As metodologias de trabalho propostas nos três países não se diferenciam muito, enfatizando a realização de experiências envolvendo os próprios alunos e valorizando o estabelecimento de conexões com outros tópicos da Matemática e o trabalho interdisciplinar. Os programas portugueses referem até o trabalho de projecto e a consideração da história da Matemática. No que respeita às novas tecnologias, todos os documentos recomendam o seu uso para a representação de dados e a realização de cálculos. No entanto, o documento americano vai bastante mais longe que os outros dois, ao valorizar a utilidade das TIC na investigação dos efeitos da mudança de alguns dados numa amostra, no uso de simulações probabilísticas e na realização de pesquisas na Internet.

Esta comparação permite concluir que o currículo português, presentemente em fase de revisão, deveria equacionar uma mudança de orientação, encarando a Estatística como um elemento fundamental da formação para a cidadania e, para isso, trazendo para o primeiro plano a Análise de Dados e dando atenção a todas as fases do processo de investigação. Nesta perspectiva, deveria ser também dada maior atenção a diversos conceitos — como os de amostra e as medidas de dispersão — fundamentais para se apreciar as características de diversos conjuntos de dados. Finalmente, haveria toda a

vantagem em serem melhor exploradas as possibilidades das novas tecnologias — calculadoras gráficas, *software* estatístico e, muito em especial, a Internet.

A mudança curricular não se esgota na elaboração e colocação em vigor de documentos oficiais. Envolve, como sabemos, a produção de materiais muito diversos, a formação dos professores, o estudo das dificuldades dos alunos e das condições necessárias ao êxito das novas propostas. Neste domínio, em Portugal há muito que fazer, dada a reduzida atenção que tem sido dispensada a este tópico. As mudanças necessárias envolvem, sobretudo, uma mudança de perspectiva, deixando de encarar a Estatística como um capítulo “pobre” e pouco interessante da Matemática, para a passar a considerar como um elemento fundamental na formação básica da generalidade dos cidadãos.

Referências

- Almeida, M. R. (2000). *Imagens sobre o ensino e a aprendizagem da estatística* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- Branco, J. (2000). Estatística no secundário: O ensino e seus problemas. In C. Loureiro, F. Oliveira, & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e aprendizagem da Estatística* (pp. 11-30). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística e Associação dos Professores de Matemática.
- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.
- DFEE (1999). *The national curriculum for maths*. London: DFEE. (disponível no endereço <http://www.nc.uk.net>)
- Hogg, R. V. (1991). Statistical education: Improvements are badly needed. *The American Statistician*, 45(4), 342-343.
- Holmes, P. (2000). What sort of statistics should be taught in schools — and why? In C. Loureiro, F. Oliveira, & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e aprendizagem da Estatística* (pp. 49-56). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística e Associação dos Professores de Matemática.
- Jacobsen, E. (1989). Why in the world should we teach statistics? In R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education: The teaching of statistics* (pp. 7-18). Paris: UNESCO.
- Loureiro, C., Oliveira, F., & Brunheira, L. (Eds.) (2000). *Ensino e aprendizagem da Estatística*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística e Associação dos Professores de Matemática.
- Ministério da Educação (1990). *Programa do 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

- Ministério da Educação (1991a). *Organização curricular e programas (2º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Ministério da Educação (1991b). *Organização curricular e programas (3º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Ministério da Educação (1991c). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (2º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Ministério da Educação (1991d). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2000). A estatística no currículo do ensino básico e secundário. In C. Loureiro, F. Oliveira, & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e aprendizagem da Estatística* (pp. 179-194). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística e Associação dos Professores de Matemática.
- Silva, J. S. (1964). *Compêndio de Matemática (7º ano, vol. II — documento policopiado)*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Snee, R. D. (1993). What's missing in statistical education? *The American Statistician*, 47(2), 149-154.

ANEXO 1 — Estatística e probabilidades nos programas portugueses (1990, 1991, 1997)

Colocar questões, recolher, organizar e representar dados

1º Ciclo

- Construir e utilizar tabelas.
- Construir e utilizar gráficos de barras.
- Actividades de classificação.

2º Ciclo

- Recolher, organizar e interpretar dados e reconhecer a sua necessidade para estudar situações da vida real.
- Frequência absoluta.
- Representar informação; construir tabelas de frequência e gráficos de barras.
- Moda e média aritmética.

3º Ciclo

- Recolher e organizar dados respeitantes a situações do dia-a-dia.
- Frequência absoluta e relativa.
- Organizar e representar dados através da construção de tabelas de frequência, gráficos de barras e circulares, polígonos de frequência e pictogramas.

Secundário

- Conhecer a evolução da estatística e os fenómenos que permite estudar.
- Recenseamento e sondagem.
- Noções de população e amostra; compreender o conceito de amostragem e reconhecer seu papel nas conclusões estatísticas; distinguir entre as conclusões sobre a amostra e a população; Noções intuitivas

sobre escolhas de amostras, sobre a necessidade de serem aleatórias, representativas e livres de vícios de concepção.

Interpretar dados usando métodos e conceitos

1º Ciclo

- Ler e interpretar informação com maior facilidade.

2º Ciclo

- Interpretar dados (ler, interpretar e comparar informação, recorrendo à moda e à média).

3º Ciclo

- Ler e interpretar informação de gráficos ou tabelas.
- Calcular média, moda e mediana para caracterizar uma distribuição.
- Analisar e comparar distribuições usando medidas de tendência central, formulando hipóteses, comunicando e discutindo as conclusões.

Secundário

- Construir tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); construir e interpretar gráficos de barras, circulares e de caule e folhas, pictogramas, histograma, polígono de frequência, diagrama de extremos e quartis; função cumulativa.
- Compreender e interpretar medidas de localização de uma amostra (moda ou classe modal, média, mediana, quartis) e de dispersão (amplitude, variância, desvio padrão, amplitude interquartis); discussão das limitações destes parâmetros.
- Interpretar distribuições recorrendo à análise de medidas de localização e dispersão.
- Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).
- Diagrama de dispersão; ideia intuitiva de correlação; coeficiente de correlação e sua variação entre -1 e 1 ; ideia intuitiva de recta de regressão, sua interpretação e limitações.

Desenvolver e avaliar inferências

1º ciclo

2º ciclo

- Fazer conjecturas a partir da interpretação da informação.

3º ciclo

- Tirar conclusões a partir da análise da informação e fazer conjecturas.
- Fundamentar afirmações recorrendo a argumentos numéricos e criticar análises estatísticas, justificando as suas razões.

Secundário

Compreender e aplicar noções básicas de probabilidade e acaso

1º ciclo

2º ciclo

- Tirar conclusões de experiências simples relacionadas com o conceito de probabilidade.

3º ciclo

- Reconhecer que em determinados acontecimentos há um grau de incerteza
- Usar conscientemente as expressões ‘muito provável’, ‘improvável’, ‘certo’, ‘impossível’...
- Identificar resultados possíveis numa situação aleatória.
- Calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento como quociente entre número de casos favoráveis e número de casos possíveis.
- Compreender e usar escalas de probabilidade de 0 a 1 ou de 0% a 100%.
- Compreender e usar a frequência relativa como aproximação da probabilidade.

Secundário

- Realizar experiências aleatórias.
- Acontecimentos elementar, certo, impossível; acontecimentos contrários, incompatíveis e independentes.
- Lei dos grandes números; conceito frequencista de probabilidade; propriedades.
- Cálculo de probabilidades pela lei de Laplace.
- Distribuição de frequência relativas e de probabilidades; representação gráfica: referência à curva de Gauss e a caracteres que se distribuem normalmente.
- Definição axiomática de probabilidade e propriedades elementares; definição de probabilidade condicionada.
- Técnicas de contagem, permutações, arranjos com e sem repetição, combinações, triângulo de Pascal e Binómio de Newton.

Observações/Sugestões metodológicas

1º ciclo

2º Ciclo

- O estudo de algumas situações (nº de irmãos, desportos preferidos, ...) pode ser feito a partir de dados obtidos pelos alunos através da realização de inquéritos na turma, na escola, no bairro... (p. 23 e 39)
- O alunos podem procurar informação em jornais e revistas, informação eventualmente organizada, respeitante à defesa do consumidor, à distribuição da população portuguesa nas últimas décadas, ... e fazer estudos comparativos. (p. 23)
- A utilização de dados já organizados respeitantes ao clima, movimentos demográficos, ..., permite o estudo de situações em ligação com outras disciplinas, nomeadamente Ciências da Natureza e História e Geografia. (p. 39)
- Sugere-se a realização de pequenos trabalhos de projecto podendo os alunos, para isso, organizar-se em grupos de acordo com os seus interesses. (p. 39)
- O computador poderá ser um bom auxiliar no estudo deste tema. (p. 39)
- Propor actividades com dados, moedas, piões, roletas... para que os alunos se sensibilizem com o papel da matemática no estudo da previsão de alguns acontecimentos. (p. 39)

3º Ciclo

- Recolher e organizar dados relativos aos próprios alunos, aos seus interesses e ao seu meio bem como outros recolhidos em revistas, jornais, empresas, entidades, etc., poderá constituir pontos de partida para a realização de estudos estatísticos. (p. 24 e 40)
- Esta unidade possibilita ligações com outras disciplinas e dentro da própria matemática (por ex: fracções e frequências relativas; amplitudes de ângulos e gráficos circulares). (p. 24)
- O tratamento das classificações de alunos de 2 turmas diferentes com a mesma média pode permitir comparar as diferentes medidas de tendência central, discutindo o papel de cada uma delas. (p. 24)
- Os cálculos não deverão ocupar muito tempo, podendo recorrer-se à calculadora ou computador. Este será também um bom auxiliar na apresentação da informação – traçado de gráficos, construção de tabelas, etc. (p. 24)
- Os alunos deverão ser solicitados a comunicar sob diversas formas – através de uma exposição oral, de um pequeno trabalho escrito, da organização de um *placard* expositivo – as conclusões do seu trabalho. (p. 40)
- Apreciar resultados de experiências como lançamento de uma moeda ou de um dado para se familiarizar com o tipo de linguagem das probabilidades. (p. 51)
- A contagem do nº de casos favoráveis levanta por vezes algumas dificuldades, podendo proporcionar-se ocasião para discutir e organizar processos de contagem.
- Discutir a probabilidade de acontecimentos como ‘Amanhã vai chover’ ou ‘Hoje o professor vai chegar a horas’.
- Realizar actividades que permitam concluir que em distribuições com frequência absoluta elevada a frequência relativa funciona como uma boa aproximação da probabilidade.

Secundário

- O professor poderá tratar o tema da estatística de uma forma descontínua ao longo do ano, nomeadamente sob a forma de trabalho de projecto. (p. 22)
- Excelente oportunidade para actividades interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor ao definir o plano de trabalho com os alunos incentivá-los a recorrer ao computador. No final, os alunos devem interpretar e comunicar os resultados à turma fazendo uma análise crítica e estando conscientes que modos diferentes de apresentar as conclusões podem alterar a mensagem. (p. 22)

- Podem recolher dados na turma, em revistas, livros, INE, ..., devendo, no entanto, ter-se em conta a maturidade e sensibilidade dos alunos para os problemas apresentados. (p. 22)
- Com exemplos devem ser estudadas propriedades elementares da média e da variância ou do desvio padrão... (p. 23)
- A partir de exemplos de nuvens de pontos o aluno deve identificar o tipo de correlação. A medida que se utiliza com mais frequência para medir o grau de associação linear é o coeficiente de correlação que se representa por r . Não devem ser propostos exercícios que envolvam o cálculo (a não ser pela máquina) nem é de exigir o conhecimento da fórmula do coeficiente de correlação... (p. 24)
- Todo o trabalho deve iniciar-se pela realização de experiências aleatórias. Os alunos podem ser levados a elaborar formas de registo “legíveis” para os resultados das suas experiências que podem ser partilhadas em grupo. As experiências e o estudo de situações devem ser aproveitadas para dinamizar discussões do tipo científico, bem como o trabalho cooperativo. (p. 31)
- Muitos problemas postos podem e devem resultar da análise de jogos conhecidos. (p. 32)
- Pascal, Tartaglia e Laplace são exemplos “interessantes” para realizar incursões na história dos conceitos matemáticos, na vida dos matemáticos, nas ligações da matemática com outros ramos do saber e actividade. (p. 32)

ANEXO 2 — Estatística e probabilidades no National Curriculum for Maths – England (1999)

Colocar questões, recolher, organizar e representar dados

KS 1 (5-7)

- Resolver um problema relevante usando listas simples, tabelas e gráficos para ordenar, classificar e organizar informação.
- Construir tabelas de frequência, incluindo tabelas para dados discretos agrupados.
- Representar dados discretos usando gráficos e diagramas, incluindo pictogramas, gráficos de barras e de linha, usando as TIC quando for adequado.

KS 2 (7-11)

- Resolver problemas envolvendo dados.

KS 3 (11-14) e KS 4-MB⁶ (14-16)

- Identificar questões que podem ser analisadas usando métodos estatísticos.
- Discutir como é que os dados se relacionam com um problema; identificar fontes possíveis de desequilíbrio e planejar minimizá-las.
- Identificar quais os principais dados que necessitam de recolher e sob que forma (incluindo dados agrupados, considerando intervalos de classe adequados e com a mesma amplitude).
- Planejar uma experiência ou inquérito; decidir que fonte de dados secundária usar.
- Planejar e usar bases de dados discretos e contínuos; recolher dados usando vários métodos incluindo observação, experimentação controlada, *data logging*, questionários e *surveys*.
- Recolher dados de fontes secundárias, incluindo tabelas impressas e listas de fontes baseadas nas TIC
- Planejar e usar tabelas de dupla entrada para dados discretos e agrupados.
- Construir, usando papel e TIC, gráficos circulares e de linha e diagramas de dispersão e de caule e folhas.

KS 4 (14-16)-MA⁶

- Identificar questões chave que podem ser analisadas usando métodos estatísticos.
- Discutir como é que os dados se relacionam com um problema; identificar fontes possíveis de desequilíbrio e planejar minimizá-las.
- Identificar quais os principais dados que necessitam de recolher e sob que forma (incluindo dados agrupados, considerando intervalos de classe adequados e com a mesma amplitude); seleccionar e justificar um plano de amostragem e um método para investigar uma população, incluindo aleatoriedade e amostra estratificada.
- Planejar uma experiência ou inquérito; decidir que fonte de dados secundária usar.

⁶ Em Matemática existem dois programas para o nível 4 – o básico (MB) e o avançado (MA) intitulados ‘Mathematics foundation’ e ‘Higher mathematics’.

- Recolher dados usando vários métodos incluindo observação, experimentação controlada, *data logging*, questionários e inquéritos.
- Recolher dados de fontes secundárias, incluindo tabelas impressas e listas de fontes baseadas nas TIC
- Planear e usar tabelas de dupla entrada para dados discretos e agrupados.
- Lidar com problemas práticos tais como não-respostas ou dados que faltem.
- Construir, usando papel e TIC, gráficos circulares e de linha, diagramas de dispersão e de caule e folhas, tabelas e gráficos de frequências acumuladas, gráficos caixa-de-bigodes e histogramas para dados contínuos agrupados.

Interpretar dados usando métodos e conceitos

KS 1 (5-7)

KS 2 (7-11)

- Interpretar tabelas, listas e gráficos usados no dia-a-dia; construir e interpretar tabelas de frequência, incluindo tabelas para dados discretos agrupados.
- Representar e interpretar dados discretos usando gráficos e diagramas, incluindo pictogramas, gráficos de barras e de linha, interpretando então uma grande variedade de gráficos e diagramas usando as TIC quando for adequado.
- Saber que a moda é uma medida de tendência central e a amplitude uma medida de dispersão, e usá-las para descrever conjuntos de dados.
- Reconhecer a diferença entre dados discretos e contínuos.

KS 3 (11-14)

- Determinar a média, a amplitude e a mediana de pequenos conjuntos de dados discretos e depois contínuos; identificar a classe modal para dados agrupados.
- Encontrar a mediana para grandes conjuntos de dados e fazer uma estimativa da média para grandes conjunto de dados agrupados.
- Desenhar e utilizar rectas de regressão, compreendendo o que é que representam.
- Estabelecer relação entre os dados e as questões iniciais.
- Interpretar uma grande variedade de gráficos e diagramas e tirar conclusões.
- Olhar para os dados para descobrir regularidades e excepções.
- Ter uma compreensão básica de correlação.

KS 4-MB (14-16)

- Determinar a média, a amplitude e a mediana de pequenos conjuntos de dados discretos e depois contínuos; identificar a classe modal para dados agrupados.
- Encontrar a mediana para grandes conjuntos de dados e fazer uma estimativa da média para grandes conjunto de dados agrupados.
- Desenhar rectas de regressão, compreendendo o que é que representam.
- Estabelecer relação entre os dados e as questões iniciais.
- Interpretar uma grande variedade de gráficos e diagramas e tirar conclusões.
- Olhar para os dados para descobrir regularidades e excepções.
- Ter uma compreensão básica de correlação como uma medida de associação entre duas variáveis; identificar a existência de correlação ou não usando rectas de regressão.

KS 4-MA (14-16)

- Determinar a mediana, os quartis e a amplitude inter-quartilica para grandes conjuntos de dados e calcular a média para grandes conjunto de dados agrupados.
- Desenhar rectas de regressão, compreendendo o que é que representam.
- Usar funções estatísticas relevantes numa calculadora ou folha de cálculo.
- Estabelecer relação entre os dados e as questões iniciais.
- Interpretar uma grande variedade de gráficos e diagramas e tirar conclusões; identificar as tendências em estudos temporais.
- Olhar para os dados para descobrir regularidades e excepções.
- Compreender que a correlação mede a associação entre duas variáveis; distinguir entre correlação positiva, negativa e nula utilizando rectas de regressão; perceber que a correlação zero não implica necessariamente a não existência de relação mas simplesmente a não existência de relação linear.

Desenvolver e avaliar inferências

KS 1 (5-7)**KS 2 (7-11)**

- Tirar conclusões de estatísticas e gráficos e reconhecer quando é que a informação é apresentada de modo a induzir em erro.

KS 3 (11-14)

- Comparar distribuições e fazer inferências, usando as formas das distribuições e medidas de tendência central e amplitude.
- Avaliar e verificar resultados, responder a questões, e modificar a sua abordagem se necessário.

KS 4-MB (14-16)

- Comparar distribuições e fazer inferências, usando as formas das distribuições e medidas de tendência central e amplitude.
- Avaliar e verificar resultados, responder a questões, e modificar a sua abordagem se necessário.
- Discutir as implicações das descobertas no contexto do problema.
- Interpretar estatísticas sociais incluindo estudos temporais (p.ex., o crescimento da população); e dados de inquéritos (p.ex., os Censos Nacionais).

KS 4-MA (14-16)

- Comparar distribuições e fazer inferências, usando as formas das distribuições e medidas de tendência central e de dispersão, incluindo mediana e quartis; compreender a densidade de frequência.
- Avaliar e verificar resultados, responder a questões, e modificar a sua abordagem se necessário.

Compreender e aplicar noções básicas de probabilidade e acaso**KS 1 (5-7)****KS 2 (7-11)**

- Explorar a dúvida e a certeza e desenvolver a compreensão de probabilidade, através de situações da sala de aula; discutir acontecimentos usando um vocabulário que inclui as palavras 'igualmente provável', 'justo', 'injusto', 'certo'.

KS 3 (11-14) e KS 4-MB (14-16)

- Compreender que processos aleatórios são imprevisíveis.
- Compreender e usar a escala das probabilidades (entre 0 e 1).
- Compreender e usar estimativas ou medidas de probabilidade de modelos teóricos, incluindo de resultados igualmente possíveis, ou de frequência relativa.
- Listar todos os resultados de acontecimentos simples, ou de dois acontecimentos sucessivos, de um modo sistemático.
- Identificar resultados mutuamente exclusivos e saber que a soma das probabilidades de todos esses resultados é 1.
- Usar o vocabulário das probabilidades na interpretação de resultados envolvendo incerteza e predição.
- Comparar probabilidades obtidas a partir de dados experimentais e teóricas.
- Compreender que se se repetir uma experiência, se podem obter resultados diferentes, e que aumentando o tamanho da amostra leva a uma melhor estimativa da probabilidade e das características da população.

KS 4 – MA (14-16)

- Compreender que processos aleatórios são imprevisíveis.
- Compreender e usar estimativas ou medidas de probabilidade de modelos teóricos, ou de frequência relativa.
- Listar todos os resultados de acontecimentos simples, ou de dois acontecimentos sucessivos, de um modo sistemático.
- Identificar resultados mutuamente exclusivos e saber que a soma das probabilidades de todos esses resultados é 1.
- Saber quando adicionar ou multiplicar duas probabilidades: se A e B são mutuamente exclusivos, então a probabilidade de A ou B ocorrerem é $P(A) + P(B)$, enquanto se A e B são acontecimentos independentes, a probabilidade de A e B ocorrerem é $P(A)*P(B)$.
- Usar diagramas em árvore para representar resultados de acontecimentos compostos, reconhecendo quando é que os acontecimentos são independentes.

- Usar o vocabulário das probabilidades na interpretação de resultados envolvendo incerteza e predição (por exemplo, 'há alguma evidência a partir desta amostra que ...').
- Comparar probabilidades obtidas a partir de dados experimentais e teóricas.
- Compreender que se se repetir uma experiência, se podem obter resultados diferentes, e que aumentando o tamanho da amostra leva a uma melhor estimativa da probabilidade e das características da população.

Tecnologias

Aos alunos devem ser dadas oportunidades para aplicar e desenvolver a sua capacidade de lidar com as TIC para apoiar a sua aprendizagem em todas as matérias. (p. 84)

KS 1 e KS 2

- Explorar e usar uma variedade de recursos e materiais, incluindo as TIC (p. 26).

KS 3 e KS 4

- Os alunos devem usar as TIC (ex: bases de dados e folhas de cálculo) para comunicar as suas descobertas e representar os dados (p. 40+...).
- Proporcionar tarefas que se foquem no uso de TIC apropriadas (ex: folha de cálculo, base de dados, programas de geometria ou funções), usar calculadoras correcta e eficientemente e saber quando não é apropriado usar uma determinada tecnologia (p. 42+...).

ANEXO 3 — Estatística e probabilidades nos Principles and Standards (NCTM 2000)

Colocar questões, recolher, organizar e representar dados

Pre-K-2

- Colocar questões e obter dados sobre si mesmos e o ambiente envolvente.
- Ordenar e classificar objectos de acordo com os seus atributos e organizar dados acerca dos objectos.
- Representar dados usando objectos concretos, desenhos e números (tabelas, gráficos de barras, de linha e pictogramas).

3-5

- Colocar questões acerca de si mesmos e do seu ambiente, questões da sua escola ou comunidade e conteúdos estudados noutras áreas (p. 177).
- Conceber investigações para responder a uma questão e considerar como é que os métodos de recolha de dados afectam a natureza do conjunto de dados.
- Recolher dados usando observações, *surveys* ou experiências.
- Representar dados usando tabelas e gráficos tais como gráficos de linha e gráficos de barras.
- Reconhecer as diferenças em representar dados numéricos e de categoria.

6-8

- Formular questões, conceber estudos, e recolher dados acerca de uma característica partilhada por duas populações ou diferentes características dentro de uma população.
- Seleccionar, criar e utilizar representações gráficas de dados apropriadas incluindo histogramas, gráficos caixa-de-bigodes e diagramas de dispersão.

9-12

- Compreender as diferenças entre vários tipos de estudos e quais os tipos de inferências que podem legitimamente ser retiradas de cada um.
- Conhecer as características de estudos bem concebidos, incluindo o papel da aleatoriedade nos inquéritos e experiências.
- Compreender o significado de dados de medida e de categorias, de dados univariados e bivariados e do termo variável.
- Compreender histogramas, gráficos caixa de bigodes paralelos e diagramas de dispersão e usá-los para apresentar os dados.
- Avaliar estatísticas básicas e compreender a distinção entre uma estatística e um parâmetro.

- Conceber inquéritos, estudos de observação e experiências tendo em consideração questões como: As questões são claras e sem ambiguidades? Qual é a população? Como é que uma amostra deve ser seleccionada? Qual deve ser o tamanho da amostra? (p. 325).
- Gráficos de caule e folhas, de pontos, circulares e de barras (p. 327).

Interpretar dados usando métodos e conceitos

Pre-K-2

- Descrever partes de dados e o conjunto de dados como um todo para determinar o que os dados mostram.
- Identificar aspectos individuais dos dados, tais como, o valor que ocorre com mais frequência (p. 177).

3-5

- Descrever a forma e características importantes de um conjunto de dados e comparar conjuntos de dados relacionados, com ênfase no modo como os dados estão distribuídos; utilizar termos como amplitude e *outlier*.
- Usar medidas de tendência central (moda, mediana e média), concentrando-se na mediana e compreender o que é que cada uma indica e não indica acerca do conjunto de dados.
- Comparar diferentes representações dos mesmos dados e avaliar como é que cada representação mostra aspectos importantes dos dados.
- A ênfase muda da descrição e análise de um conjunto de dados para as comparações envolvendo dois ou mais conjuntos de dados (p.50).

6-8

- Encontrar, usar e interpretar medidas de tendência central e de dispersão, incluindo a média e a amplitude interquartilica.
- Discutir e compreender a correspondência entre conjuntos de dados e as suas representações gráficas, especialmente histogramas, gráficos de caule e folhas, gráficos caixa de bigodes e diagramas de dispersão (analisar a simetria e assimetria dos gráficos – p. 251) .
- Utilizar instrumentos para investigar relações e tendências em dados bivariados, incluindo gráficos de dispersão e rectas de regressão (p. 50).

9-12

- Para dados univariados de medida, ser capaz de apresentar a distribuição, descrever a sua forma, centro e dispersão, e seleccionar e calcular estatísticas resumidas.
- Para dados bivariados de medida, ser capaz de apresentar um gráfico de dispersão, descrever a sua forma, centro e dispersão, e determinar coeficientes de regressão, equações de rectas de regressão, e coeficientes de correlação usando instrumentos tecnológicos.
- Apresentar e discutir dados bivariados onde pelos menos uma variável seja de categorias.
- Reconhecer como é que as transformações lineares de dados univariados afectam a forma, centro e dispersão.
- Identificar tendências nos dados bivariados e encontrar funções (ex: linear, exponencial, quadrática) que modelem os dados ou os transformem de modo a que possam ser modelados.
- Examinando as características dos gráficos, ser capaz de explicar as diferenças nas medidas de tendência central (média e mediana) e de dispersão (desvio-padrão e amplitude interquartilica (p. 327).
- Compreender que o coeficiente de correlação informa sobre: o modo como os dados estão ligados à rectas de regressão; e a intensidade da relação entre duas variáveis (p. 329).

Desenvolver e avaliar inferências

Pre-K-2

- Discutir acontecimentos relacionados com as experiências dos alunos como sendo prováveis ou improváveis.

3-5

- Propor e justificar conclusões e predições que são baseadas nos dados e conceber estudos para posteriormente investigar as conclusões ou predições.
- Começar a compreender que muitos conjuntos de dados são amostras de populações mais alargadas; pensar acerca do que é que afecta a representatividade de uma amostra (p. 180).

6-8

- Utilizar observações acerca das diferenças entre uma ou mais amostras para formular conjecturas acerca das populações das quais as amostras foram retiradas.
- Formular conjecturas acerca da possível relação entre duas características de uma amostra com base em diagramas de dispersão e rectas de regressão.
- Usar conjecturas para formular novas questões e planejar novos estudos para lhes responder.

9-12

- Usar simulações para explorar a variabilidade das amostras estatísticas de uma população conhecida e construir distribuições de amostragem.
- Compreender como é que as amostras estatísticas reflectem os valores dos parâmetros da população e usar distribuições de amostragem como base para inferência informal.
- Avaliar relatórios publicados que sejam baseados em dados examinando a concepção do estudo, a adequabilidade da análise dos dados, e a validade das conclusões.
- Compreender como é que as técnicas estatísticas básicas são utilizadas para monitorar características de processo no mercado de trabalho.
- Usar um modelo determinado para os dados para fazer predições e reconhecer e explicar as limitações dessa predições (p. 329).
- Compreender o significado de recta de regressão, o seu papel em fazer predições e inferências, e as suas limitações e possíveis extensões (p. 329).

Compreender e aplicar noções básicas de probabilidade e acaso

Pre-K-2

- Utilizar vocabulário como: mais provável, menos provável, certo, impossível (p. 114).
- Realizar experiências tais como lançar dados e rapas (p. 114).

3-5

- Descrever acontecimentos como prováveis ou improváveis e discutir o grau de probabilidade usando palavras como (certo, igualmente provável e impossível).
- Prender a probabilidade de resultados de experiências simples e testar essas predições.
- Compreender que a medida de probabilidade de um acontecimento pode ser representada por um número entre 0 e 1.

6-8

- Compreender e utilizar terminologia apropriada para descrever acontecimentos complementares e mutuamente exclusivos.
- Usar a proporcionalidade e uma compreensão básica de probabilidade para formular e testar conjecturas acerca dos resultados de experiências e simulações.
- Calcular probabilidades de acontecimentos compostos simples, usando métodos tais como listas, diagramas em árvore e modelos de área.

9-12

- Compreender os conceitos de espaço amostral e distribuição de probabilidade e construir espaços amostrais e distribuições em casos simples.
- Utilizar simulações para construir distribuições empíricas de probabilidade.
- Calcular e interpretar o valor esperado de variáveis aleatórias em casos simples.
- Compreender os conceitos de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.
- Compreender como se calcula a probabilidade um acontecimento composto.
- Identificar acontecimentos mutuamente exclusivos e condicionais, utilizando o conhecimento de combinações, permutações e contagens para o cálculo de probabilidades associadas a tais acontecimentos (p. 331).

Tecnologias

À medida que os alunos trabalhem com conjuntos de dados maiores ou mais complexos, eles podem reordenar os dados e representá-los em gráficos rapidamente, utilizando tecnologia de modo que se possam focar na análise dos dados e na compreensão do que é que eles significam (p. 49).

3-5

Os alunos devem usar *software* computacional que os ajude a organizar e representar os seus dados, incluindo *software* gráfico e folha de cálculo. A folha de cálculo permite aos alunos organizar e ordenar um grande conjunto de dados e criar uma variedade de gráficos (p. 178).

6-8

- Como é que mudanças nos valores dos dados afectam a média e a mediana de um conjunto de dados? Para responder a esta questão, os professores poderiam ter alunos a usar uma calculadora para criar uma tabela de valores e calcular a média e a mediana. Depois eles podiam mudar um dos valores dos dados na tabela e ver se os valores da média e da mediana também mudavam. Esta relação pode efectivamente ser demonstrada usando *software* através do qual os alunos podem controlar os valores dos dados e observar como é que a média e a mediana são afectadas. (p. 251).

- Os professores podem encorajar os alunos a representar graficamente muitos conjuntos de dados e olhar para as relações entre os gráficos; *software* gráfico e calculadoras gráficas podem ser muito úteis neste trabalho. (p.253) – por exemplo, para investigar relações lineares ou não lineares.

- As simulações em computador podem ajudar a evitar ou ultrapassar erros de pensamento probabilístico. As simulações permitem aos alunos aceder a amostras relativamente grandes que podem ser geradas rapidamente e modificadas facilmente, facilitando assim a aprendizagem das probabilidades. (p.254)

9-12

Usando *software* dinâmico, os alunos podem modificar a posição das rectas candidatas a rectas de regressão e ver os efeitos dessas mudanças nos resíduos quadrados.

Usando a tecnologia, os alunos devem ser capazes de determinar a equação da rectas de regressão (*least-squares regression line*) e o coeficiente de correlação. (p. 329)

Interdisciplinaridade

6-8

Como as experiências laboratoriais envolvendo recolha de dados fazem parte do currículo de ciências, os professores de matemática podem considerar útil colaborar com os professores de ciências de modo a serem consistentes na concepção das experiências. Tal colaboração pode ser estendida de modo a que os alunos recolham os dados para uma experiência na aula de ciências e os analisem na aula de matemática. (p. 249)